2.5. Blow-ups

① 点での blow-up (Example 2.5.1)

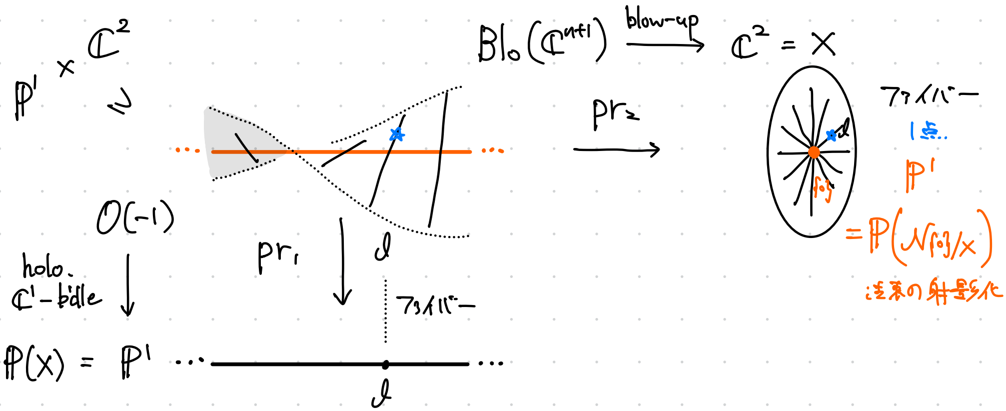
Construction. (点での blow-up) $X = \mathbb{C}^{n+1}$

X の点 0 での blow-up を以下で定義する.

$$\mathrm{Bl}_0(X) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}(X)}(-1) = \left\{ (\ell, z) \in \underset{\mathbb{P}^n}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}(X)}} \times \underset{\mathbb{C}^{n+1}}{\underset{\shortparallel}{X}} \;\middle|\; \ell \ni z \right\} \xrightarrow[\mathrm{pr}_2]{} X$$

(incidence variety 表示)

☆ 図



☆ 座標表示

$$\mathrm{Bl}_0(\mathbb{C}^{n+1}) = \left\{ \begin{array}{c} [x_0 : \cdots : x_n], (z_0, \ldots, z_n) \\ \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall i, j \leq n \\ x_i \cdot z_j = x_j \cdot z_i \end{array} \right\}$$

↑ $\exists \lambda, \forall i,\ z_i = \lambda x_i$ でも OK.

② 線型部分空間での blow-up (Example 2.5.2)

Construction. (線型部分空間での blow-up)　$0 \leq d \leq n$

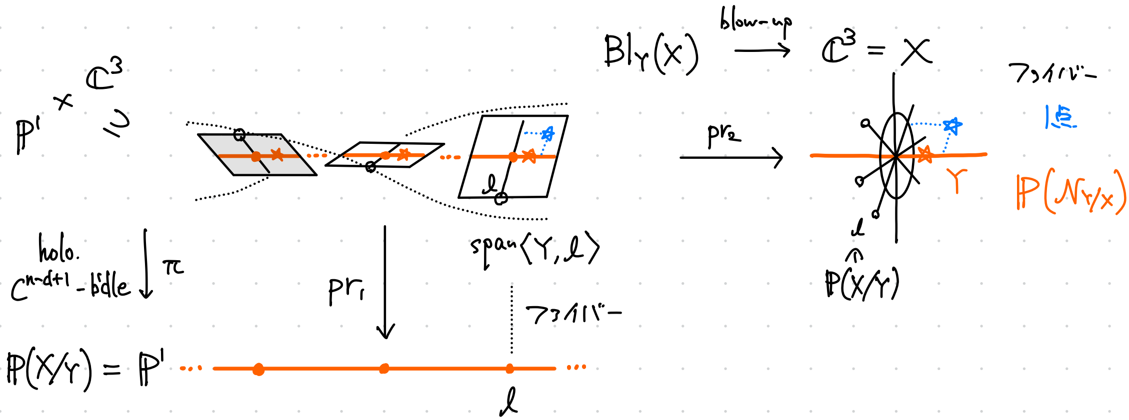
$\mathbb{C}^{n-d} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ を、$z_0 = \cdots = z_d = 0$ で定まる線型部分空間とする。

$X = \mathbb{C}^{n+1}$ の $Y = \mathbb{C}^{n-d}$ に沿った blow-up を以下で定義する。

$$\mathrm{Bl}_Y(X) = \left\{ (\ell, z) \in \underset{\mathbb{P}^d}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}(X/Y)}} \times \underset{\mathbb{C}^{n+1}}{\underset{\shortparallel}{X}} \;\middle|\; \mathrm{span}\langle Y, \ell \rangle \ni z \right\} \xrightarrow{pr_2} X$$

(incidence variety 表示)

☆ 図 $(n=2,\ d=1)$



☆ 座標表示

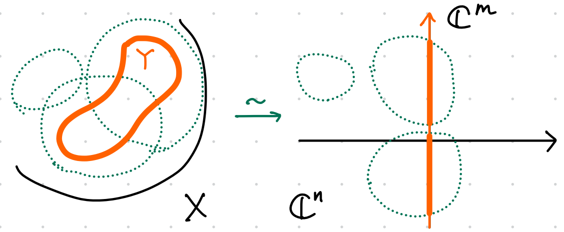
$$\mathrm{Bl}_{\mathbb{C}^{n-d}}(\mathbb{C}^{n+1}) = \left\{ \begin{array}{c} [x_0, \ldots, x_d], (z_0, \ldots, z_n) \\ \in \mathbb{P}^d \times \mathbb{C}^{n+1} \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall i, j \leq d \\ x_i \cdot z_j = x_j \cdot z_i \end{array} \right\}$$

Rmk. $d = n$ で、点での blow-up に一致する。

③ 一般の部分多様体での blow-up

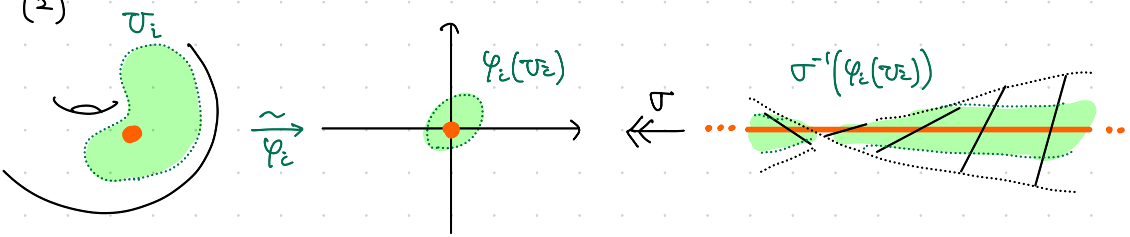
アイデア：$Y \subseteq X$ が線型部分空間に見えるようなチャートごとに blow-up し、貼合せる

Construction.（一般の部分多様体での blow-up）　$Y^m \subseteq X^n$: cplx mfd



(1) atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ であって、
$\varphi_i(U_i \cap Y) = \varphi_i(U_i) \cap \mathbb{C}^m$
なるものを取る。

(2)



X　　$\mathbb{C}^n$　これらが貼り合う。　$Bl_{\mathbb{C}^m}(\mathbb{C}^n)$

Thm. 2.5.3.

$Y \subseteq X$: sb mfd. に対し、以下をみたす $\sigma : Bl_Y(X) \to X$ が存在する。

- $Bl_Y(X) \setminus \sigma^{-1}(Y) \xrightarrow{\sim} X \setminus Y$: iso.　（Yの外ではiso）
- $$\begin{tikzcd} \sigma^{-1}(Y) \arrow[rr] \arrow[dr, "\wr"'] & \circlearrowleft & Y \\ & \mathbb{P}(N_{Y/X}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$: 法束の射影束　（Y上のファイバーは法束の射影化）

Def. 2.5.4　上のとき、超曲面 $\sigma^{-1}(Y)$ を σ の exceptional divisor という。

Rmk. ・ $Y \subseteq X$ が codim$=1$ なら $Bl_Y(X) = X$.　（法束は $\mathbb{C}$ で、構成より）

〜貼り合わせ〜

○貼り合わせに必要なもの…

⓪ cplx mfd の族 $\{\hat{X}_i\}$

① sb mfd と同型の族 $\{\hat{X}_i \supseteq \hat{X}_{ij} \xrightarrow[\sim]{\hat{\phi}_{ij}} \hat{X}_{ji} \subseteq \hat{X}_j\}$

② 要求

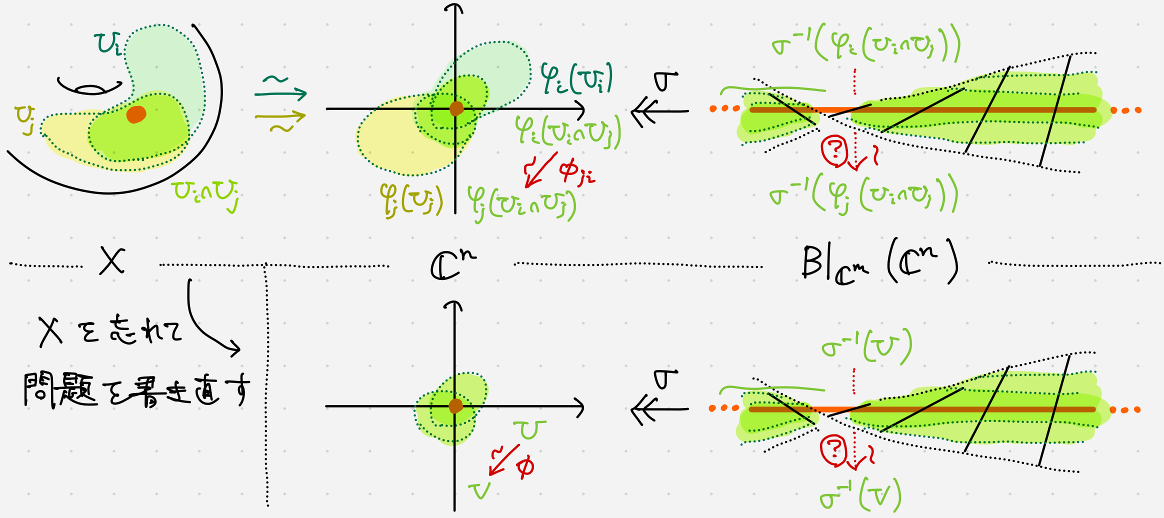
$$\begin{tikzcd} \hat{X}_{ij} \cap \hat{X}_{ik} \arrow[rr, "\hat{\phi}_{ik}", "\sim"'] \arrow[dr, "\hat{\phi}_{ij}"', "\sim"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \hat{X}_{kj} \cap \hat{X}_{ki} \\ & \hat{X}_{ji} \cap \hat{X}_{jk} \arrow[ur, "\hat{\phi}_{jk}"', "\sim"] & \end{tikzcd}$$

○目標：⓪ $\hat{X}_i = \sigma^{-1}(\varphi_i(U_i))$, $\hat{X}_{ij} = \sigma^{-1}(\varphi_i(U_i \cap U_j))$ とおき、

① $\hat{\phi}_{ij}$ は $\phi_{ij} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ の持ち上げとし

② それらの compatibility をみる。

①



アイデア：例外因子の外では ϕ でよさそう。

$\underbrace{\text{例外因子上の点}}_{=\text{直線}}$は、$\phi$ の"1次近似"のデータを見て

それで送ればよさそう。

wts 1 :
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^m \arrow[r, hook] & \mathbb{C}^n & & \mathrm{Bl}_{\mathbb{C}^m}(\mathbb{C}^n) \arrow[ll, two heads, "\sigma"'] \\
\mathbb{C}^m \cap U \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\wr"'] & U \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[d, "\wr", "\phi"'] & & \sigma^{-1}(U) \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[ll, two heads] \arrow[d, "\wr"', "\hat{\phi}"] \\
\mathbb{C}^m \cap V \arrow[r, hook] & V & & \sigma^{-1}(V) \arrow[ll, two heads]
\end{tikzcd}$$

ϕ のとき、$\Longrightarrow$ $\hat{\phi}$ に持ち上がるか？

構成 : ・ここより $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^n)$ とかくとき

$k > m$ に対し $\phi^k = \sum_{j=m+1}^{n} z_j \phi_{k,j}$ とかける. (cf. 2.4.7, 観察)

$$\begin{pmatrix} \phi^{m+1} \\ \vdots \\ \phi^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{m+1,m+1} & \cdots & \phi_{m+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n,m+1} & \cdots & \phi_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{m+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$j, k > m$ で
$$\left.\frac{\partial \phi^k}{\partial z_j}\right|_{\mathbb{C}^m} = \phi_{k,j}\big|_{\mathbb{C}^m}$$

よって $M_\phi \big|_{\mathbb{C}^m} = J\begin{pmatrix}\phi^{m+1} \\ \vdots \\ \phi^n\end{pmatrix}\Bigg|_{\mathbb{C}^m}$

・$\mathbb{P}^{n-m-1} \times \mathbb{C}^n \supseteq \mathrm{Bl}_{\mathbb{C}^m}(\mathbb{C}^n)$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Bl}_{\mathbb{C}^m}(\mathbb{C}^n) & \\
\sigma^{-1}(U) \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[r, "\hat{\phi}", "\sim"'] & \sigma^{-1}(V)
\end{tikzcd}$$

$(x, z) \in \sigma^{-1}(U)$ s.t. $\begin{cases} z \in \mathrm{span}\langle \mathbb{C}^m, x \rangle \\ z \in U \end{cases}$ $\mapsto \left(M_\phi(z) \cdot x, \ \phi(z) \right)$

$\in$? チェック☆ $\begin{cases} \circ\ \phi(z) \overset{?}{\in} \mathrm{span}\langle \mathbb{C}^m, M_\phi(z) \cdot x \rangle \\ \circ\ \phi(z) \in V \quad (\mathrm{OK}) \end{cases}$

∘ $(x, z) \notin E$ なら $\hat{\phi}(x, z \notin \mathbb{C}^m) = (\text{一意}, \phi(z) \notin \mathbb{C}^m) \notin E$.

∘ $(x, z) \in E$ なら $\hat{\phi}(x, z \in \mathbb{C}^m) = (J\phi(z) \cdot x, \phi(z) \in \mathbb{C}^m) \in E$

チェック☆ : $z \in \mathbb{C}^m$ なら明らか. そうでないとき. $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ なら $x = \mathrm{span}\langle z_{m+1}, \dots, z_n \rangle$ より

$$\phi(z) = \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1(z) \\ \vdots \\ \phi_m(z) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in\ \mathbb{C}^m} + \underbrace{\begin{pmatrix} & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \\ \phi_{m+1,m+1}(z) & \cdots & \phi_{m+1,n}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n,m+1}(z) & \cdots & \phi_{n,n}(z) \end{pmatrix}}_{= M_\phi(z)} \underbrace{\begin{pmatrix} z_{m+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}}_{\in\ x}$$

より $\phi(z) \in \mathrm{span}\langle \mathbb{C}^m, M_\phi(z) \cdot x \rangle$

② $X\setminus Y$ でコンパチならば（ϕ_{ij} がコンパチなので）OK.

Y 上において

$$\begin{array}{ccc}
(x, z\in\mathbb{C}^m) & \xmapsto{\ \widehat{\phi}_{ki}\ } & \left(J\phi_{ki}(z)\cdot x \ , \ \phi_{ki}(z) \right) \\
\Big\downarrow \widehat{\phi}_{ji} & & \Vert ?\ \text{チェック}☆ \qquad \Vert \mathrm{OK}. \\
\left(J\phi_{ji}(z)\cdot x,\ \phi_{ji}(z)\right) & \xmapsto{\ \widehat{\phi}_{kj}\ } & \left(J\phi_{kj}(\phi_{ji}(z))\cdot\left(J\phi_{ji}(z)\cdot x\right),\ \phi_{kj}(\phi_{ji}(z))\right)
\end{array}$$

法束 $N_{Y/X}$ のコサイクルを思い出す：

アトラス $\{(U_i, \varphi_i)\}$ は $\varphi_i(U_i\cap Y) = \varphi_i(U_i)\cap\mathbb{C}^m$ なので、接束 $T_X|_Y := (J\phi_{ij}\circ\varphi_j)$ は

$\left(\begin{array}{c|c} T_Y & * \\ \hline 0 & ☆ \end{array}\right)$ の形をもち、☆部分 $= (J\phi_{ij}\circ\varphi_j)_{i,j\geq m+1}$ が $N_{Y/X}$ を定義する.

チェック☆：$N_{Y/X}$ におけるコサイクル条件は、$y\in U_i\cap U_j\cap U_k$ に対し

$$J\phi_{kj}(\varphi_j(y))\ J\phi_{ji}(\varphi_i(y)) = J\phi_{ki}(\varphi_i(y))$$

と言っているので、$\varphi_i(y) = z$ と取ると、$\phi_{ji}\circ\varphi_j = \varphi_j$ より

$$J\phi_{kj}(\phi_{ji}(z))\ J\phi_{ji}(z) = J\phi_{ki}(z)$$

さらに、Y のファイバーが $\mathbb{P}(N_{Y/X})$ と同型であることも分かった.

☆点でのblow-upにおける可逆層のふるまい

以下 X: n次元mfd, $Y=\{x\}\subseteq X$, $\hat{X}=Bl_Y(X)\xrightarrow{\sigma}X$ とする.

<u>Prop. 2.5.5.</u> $K_{\hat{X}}\cong\sigma^*K_X\otimes\mathcal{O}_{\hat{X}}((n-1)E)$

(blow-upにおいて $\hat{X}\setminus E\xrightarrow{\sim}X\setminus\{x\}$ (Eの外では同型) なので、標準束Kには"Eにおける"変化 $\otimes\mathcal{O}_{\hat{X}}((n-1)E)$ が現れる.)

prf.

- $T_{\hat{X}}\to\sigma^*T_X$ (Ex.2.2.10) から $\sigma^*K_X\to K_{\hat{X}}$ が誘導され $\hat{X}\setminus E$ 上で iso.
- すると $K_{\hat{X}}\otimes(\sigma^*K_X)^\vee|_{\hat{X}\setminus E}=\mathcal{O}_{\hat{X}\setminus E}$ より
  $K_{\hat{X}}\otimes(\sigma^*K_X)^\vee=\mathcal{O}_{\hat{X}}(aE)$ という形になる.
- あとは x近傍(E近傍)で a を決定すればよく.
  局所的なので $X=\mathbb{C}^n$, $x=0$ とする. $\hat{X}\subseteq\mathbb{P}^{n-1}\times\mathbb{C}^n$ の座標を x,z とする.
- $\hat{X}\supseteq V_i=\{x_i\neq0\}$ 上で、$\mathbb{C}^{n+1}$ (座標 $u_1,\ldots,u_{n+1}$) $\supseteq\{u_i=1\}$ への自明化
  $\varphi_i: V_i\to\{u_i=1\}\subseteq\mathbb{C}^{n+1}$; $(x,z)\mapsto\left(\frac{x_1}{x_i},\ldots,\frac{x_i}{x_i},\ldots,\frac{x_n}{x_i},z_i\right)$ を取る.
-

$$
\begin{tikzcd}
 & \varphi_j(V_i\cap V_j)\ni\left(\frac{x_1}{x_j},\ldots,\frac{x_i}{x_j},\ldots,\frac{x_j}{x_j},\ldots,\frac{x_n}{x_j},z_j\right) \arrow[dd, "\varphi_{ij}"] \\
V_i\cap V_j\ni(x,z) \arrow[ur, "\varphi_j"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & \\
 & \varphi_i(V_i\cap V_j)\ni\left(\frac{x_1}{x_i},\ldots,\frac{x_i}{x_i},\ldots,\frac{x_j}{x_i},\ldots,\frac{x_n}{x_i},z_i\right)
\end{tikzcd}
$$

$$u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_j,\ldots,u_n,u_{n+1}$$

$$\varphi_{ij}\downarrow\qquad z_jx_i=z_ix_j \text{ より}$$

$$\frac{u_1}{u_i},\ldots,\frac{u_i}{u_i},\ldots,\frac{u_j}{u_i},\ldots,\frac{u_n}{u_i},u_iu_{n+1}$$

$$\det J(\varphi_{ij})=u_i^{-(n-1)}$$

- $K_{\hat{X}}$ のコサイクルは $\left\{\det J(\varphi_{ij})^{-1}\circ\varphi_j=\left(\frac{x_i}{x_j}\right)^{n-1}\right\}$.
- 一方 E は各V_i内で $z_i=0$ で定まれているので、
  付随する可逆層 $\mathcal{O}_{\hat{X}}(E)$ のコサイクルは $\left\{V_i\cap V_j, u_i\circ\varphi_j=\frac{x_i}{x_j}\right\}$.

比較して $K_X=$ triv. よりOK.

□

Cor. 2.5.6. $\mathcal{O}(E)|_E \cong \mathcal{O}_E(-1)$ $\quad (E \cong \mathbb{P}^{n-1})$

prf.

- $\mathcal{O}(-n) \overset{\substack{E\cong\mathbb{P}^{n-1}\\ 2.4.3}}{\cong} K_E \underset{\text{adj.}}{\overset{2.4.1)}{\cong}} (K_{\hat{X}} \otimes \mathcal{O}(E))|_E$

$$\overset{2.5.5.}{\cong} (\sigma^* K_X \otimes \mathcal{O}((n-1)E) \otimes \mathcal{O}(E))|_E$$

$$\cong (\sigma^* K_X \otimes \mathcal{O}(nE))|_E$$

$$\cong \sigma^* K_X|_E \otimes \mathcal{O}(nE)|_E$$

$$\cong \mathcal{O}(nE)|_E$$

$$= \mathcal{O}(E)|_E^{\otimes n}$$

$$\begin{tikzcd}
\sigma^* K_X \arrow[d] & & & K_X \arrow[lll, mapsto] \arrow[d] \\
& \hat{X} \arrow[r, "\sigma"] & X & \\
& E \arrow[u, hook] \arrow[r] & \{x\} \arrow[u, hook] & \\
\sigma^* K_X|_E & & & \text{triv.} \arrow[lll]
\end{tikzcd}$$

$\sigma^* K_X|_E = \text{triv.}$

- $\mathrm{Pic}\,\mathbb{P}^{n-1}$ は torsion free (Ex.3.2.11) より OK.

別prf.

- 再び $X = \mathbb{C}^n$ の原点 $x=0$ での blow up としてよい. $E = \{z=0\}$.
- $\mathcal{O}_{\hat{X}}(E) = \bigcup_{(l,z)\in\hat{X}} l$ である (位相はよしなに)

  ($\because$ section $\hat{X} \to \mathcal{O}_{\hat{X}}(E)$; $(l,z) \mapsto ((l,z),z)$ は E に沿って1位で消える.

-

$$\begin{array}{ccccc}
 & & l_{\text{on}(l,z)} & \longrightarrow & l_{\text{on } l} \\
\mathcal{O}_{\hat{X}}(E)|_E & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\hat{X}}(E) & \longrightarrow & \mathcal{O}(-1) \\
\downarrow & \text{p.b.} & \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow \\
\mathbb{P}^{n-1} = E & \subseteq & \hat{X} \subseteq \mathbb{P}^{n-1}\times\mathbb{A}^n & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^{n-1} \\
 & & (l,z) & \longmapsto & l
\end{array}$$

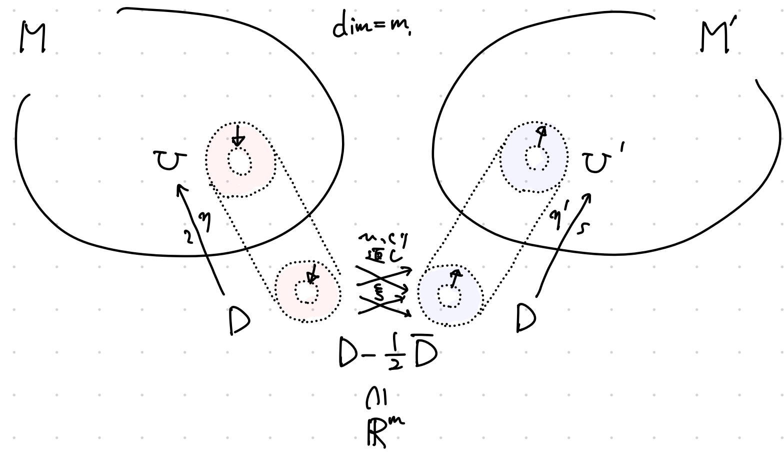
$[\mathbb{P}^{n-1} = E \subseteq \hat{X} \subseteq \mathbb{P}^{n-1}\times\mathbb{A}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^{n-1}] = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^{n-1}}$

よって $\mathcal{O}_{\hat{X}}(E)|_E = \mathcal{O}(-1)$

$\square$

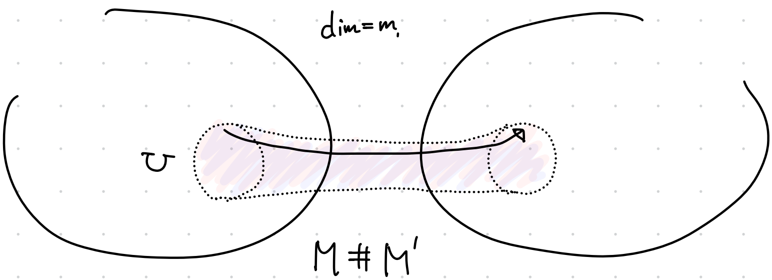
Rmk. X : 曲面 $\quad E^2 = \int_{\hat{X}} \mathcal{N}_{E/\hat{X}} \overset{\text{Ex.2.3.2}}{=} \deg \mathcal{N}_{E/\hat{X}} = \deg \mathcal{O}(E)|_E \overset{\text{Cor.}}{=} -1$: 自己交点数 -1.

☆連結和としての表示



- $D \subseteq \mathbb{R}^m$：半径1の開球
- $\eta : D \xrightarrow{\sim} U \subseteq M$
- $\eta' : D \xrightarrow{\sim} U' \subseteq M'$
- $\xi : D - \frac{1}{2}\overline{D} \xrightarrow{\sim} D - \frac{1}{2}\overline{D}$

$$x \mapsto \frac{x}{2\|x\|^2}$$



- $M \# M$
$$:= \left(M \setminus \eta\left(\tfrac{1}{2}\overline{D}\right)\right) \cup_{\xi} \left(M' \setminus \eta'\left(\tfrac{1}{2}\overline{D}\right)\right)$$
ξというか$\eta'\xi\eta^{-1}$

- $M \# M'$のdiff.typeはU, U', η, η'の選び方によらない。
- M, M'に向きが与えられているときは、ηをori.pres.にすると
η'をori.rev.
$M \# M'$にも自然な向きが入る。

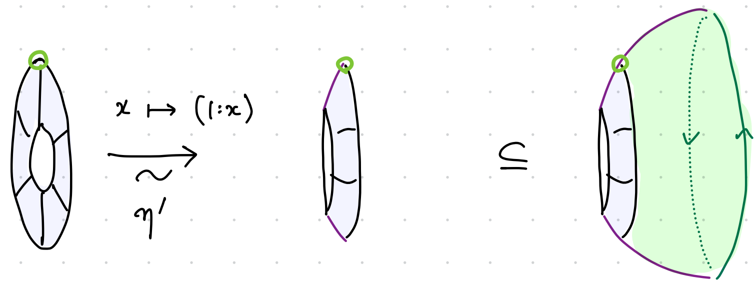
- $\overline{M}$:= Mのori.rev.
- $\overline{\mathbb{P}^n}$に興味がある。

Prop.2.5.8. $Bl_x(X) \cong X \# \overline{\mathbb{P}^n}$

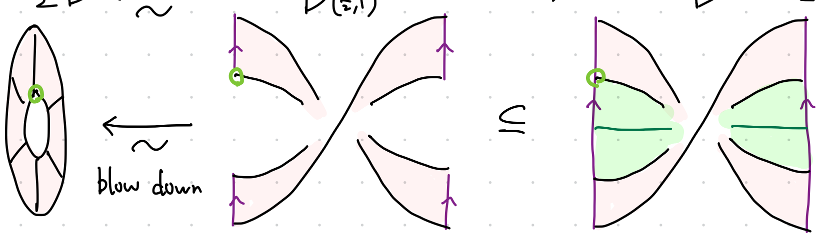
prf. 接着場所によらないので、$X = D$：単位円板 $\ni x = 0$ としてよい.

- by def で $\hat{D} = \left\{ (x, z) \in D \times \mathbb{P}^{n-1} \;\middle|\; x_i \cdot z_j = x_j \cdot z_i \right\}$
- $\eta = id_D$, $\eta' : D \longrightarrow \overline{\mathbb{P}^n}$; $x \mapsto (1 : x)$ とfixする.

ori.rev.



$$\begin{tikzcd}
D - \frac{1}{2}\overline{D} \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\wr", "\text{invert}"'] & \eta'(D) - \eta'(\frac{1}{2}\overline{D}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\wr"] & \mathbb{P}^n - \eta'(\frac{1}{2}\overline{D}) \arrow[d, "\wr"] & (x_0 : x) \arrow[d, mapsto] \\
D - \frac{1}{2}\overline{D} & \hat{D}(\frac{1}{2}, 1) \arrow[l, "\sim"] \arrow[r, hook] & \hat{D} \subseteq D \times \mathbb{P}^{n-1} & \left(\frac{x_0 x}{2\|x\|^2}, [x] \right)
\end{tikzcd}$$



□